Лекция 9
Тема. Интегральное исчисление функции одной переменной. Неопределенный интеграл

План лекции:

1) *Понятие первообразной функции и неопределенного интеграла.*
2) *Интегралы, выражаемые и невыражаемые в элементарных функциях.*
3) *Основные свойства неопределенных интегралов.*
4) *Таблица простейших неопределенных интегралов.*
5) *Основные методы интегрирования. Интегрирование методом замены переменной. Метод интегрирования по частям.*
6) *Интегрирование рациональных функций. Разложение рациональной функции на элементарные дроби. Интегрирование элементарных дробей. Метод Остроградского.*
7) *Интегрирование некоторых тригонометрических функций.*
8) *Интегрирование иррациональных выражений.*

§1. Понятие первообразной функции и неопределенного интеграла.

Основная задача дифференциального исчисления состоит в нахождении дифференциала данной функции или ее производной. Интегральное исчисление решает обратную задачу: по заданному дифференциалу, а следовательно, и производной неизвестной функции F(x), требуется определить эту функцию. Иными словами, имея выражение $dF(x) = f(x)dx$, или соответственно $F'(x) = \frac{dF(x)}{dx} = f(x)$, где f(x) – известная функция, нужно найти функцию F(x). При этом искомая функция F(x) называется первообразной функцией по отношению к функции f(x). Итак:

Пусть на интервале (a,b), возможно бесконечном, определена функция одной действительной переменной f(x).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ-1 (*точная первообразная*). Функция F(x) называется точной первообразной по отношению к функции f(x) на интервале (a,b), если в любой точке этого интервала функция F(x) дифференцируема и имеет производную $F'(x)$, равную f(x) (или, что то же самое, f (x)dx служит дифференциалом для F(x): $dF(x) = f(x)dx$).

Например, функция x^3 является точной первообразной для функции $3x^2$ на множестве R, поскольку $(x^3)' = 3x^2$

Замечание. Под точной первообразной для функции f (x) на сегменте [a,b] будем понимать функцию F(x), имеющую производную $F'(x)$ в любой внутренней точке сегмента, равную f(x), и, кроме того, имеющую правую производную $F'(a + 0)$, равную $f(a + 0)$, и левую производную $F'(b - 0)$, равную $f(b - 0)$.

Заметим, что если функция f (x) имеет на (a,b) хотя бы одну первообразную функцию F(x), то она имеет на этом интервале сразу бесконечное множество первообразных, поскольку любая функция вида F(x)+ C , где C – произвольное действительное число, также будет удовлетворять определению первообразной. Более того, если F(x) – одна из первообразных для функции f (x) на (a,b), то любая другая первообразная $\bar{F}(x)$ для этой функции на данном интервале имеет вид $\bar{F}(x) = F(x)+C$, где C – некоторое действительное число. Таким образом, любые две первообразные одной функции могут отличаться только на константу. Подчеркнём, что, в силу дифференцируемости, первообразная всегда является непрерывной функцией.

Не всякая функция имеет первообразную в приведённом выше строгом смысле слова, потому что не всякая функция является производной от другой функции. Но если функция f(x), определённая на (a,b), имеет на этом множестве первообразную, то она называется *интегрируемой* на нём.

Расширить класс интегрируемых функций позволило введение понятия обобщённой первообразной.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ-2 (*обобщённая первообразная*). Функция F(x) называется обобщённой первообразной для функции f(x) на интервале (a,b), если:

1) F(x) непрерывна на (a,b);

2) в любой точке $x \in (a,b)$, за исключением, быть может, множества точек K , функция F(x) дифференцируема и имеет производную $F'(x)$, равную f (x). При этом в случае конечного интервала (a,b) множество K состоит не более чем из конечного числа точек. Если же интервал (a,b) бесконечен, т.е. имеет вид $(-\infty,b)$, $(a,+\infty)$ или $(-\infty,+\infty)$, то множество K может быть счётным, но при этом каждый конечный подинтервал из (a,b) не должен содержать более конечного числа точек K .

Таким образом, в отличие от определения точной первообразной, в понятии обобщённой первообразной допускается, что производная может не существовать в отдельных точках интервала интегрирования. Если нет необходимости подчёркивать, что мы имеем дело именно с точной или обобщённой первообразной, то будем называть F(x) просто *первообразной.*

Пример 1. Найти все первообразные для функции f (x) = sgn x на интервале (−1,1).
Решение. Покажем, что точная первообразная для данной функции

$$f(x)=\begin{cases}1, \textit{если} & x\in(0,1),\\ 0, \textit{если} & x=0,\\ -1, \textit{если} & x\in(-1,0),\end{cases}$$

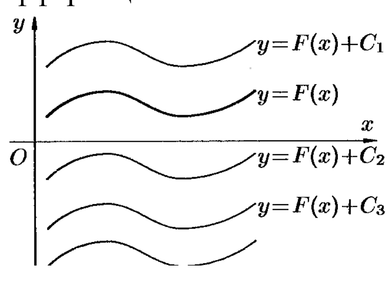
на указанном интервале не существует и можно найти лишь обобщённую первообразную. Действительно, при $x\in(0,1)$ первообразная $F(x)$ имеет общий вид $x+C_1$, а при $x\in(-1,0)$, соответственно, вид $-x + C_2$, где C_1 , C_2 – произвольные действительные константы. Учтём, что в точке $x = 0$ первообразная должна быть непрерывной. Записав условие непрерывности

$$\lim_{x\to 0-0}\left(-x+C_2\right)=\lim_{x\to 0+0}\left(x+C_1\right)=F(0),$$

определяем искомое соотношение между константами: $C_1 = C_2$. Таким образом, общий вид любой из первообразных: $F(x)= |x| + C_1$, где $C_1 \in R$. Любая из этих функций непрерывна на (−1,1) и $\forall x\in(-1,0)\cup(0,1)$ её производная совпадает с $\operatorname{sgn} x$. При этом в точке $x = 0$ первообразная не имеет производной.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ-3 *(неопределённый интеграл).* Совокупность всех первообразных функций для данной функции f(x) на промежутке (a,b) называется неопределённым интегралом от функции f(x) на этом множестве и обозначается $\int f(x)dx = F(x)+C;$

где F(x) – любая первообразная для f (x) на (a,b), C – произвольная действительная константа. При этом символ $\int$ называется знаком интеграла, f(x) – подынтегральной функцией (если интеграл существует, то функция называется интегрируемой), f(x)dx – подынтегральным выражением, x – переменной интегрирования, а dx – её дифференциалом. Область интегрирования (a,b) обычно можно определить из контекста задачи (чаще всего это промежутки непрерывности f (x)).



Геометрически неопределенный интеграл представляет собой семейство «параллельных» кривых y=F(x)+C (каждому числовому значению C соответствует определенная кривая семейства). График каждой первообразной (кривой) называется *интегральной кривой.*

§2. Интегралы, выражаемые и невыражаемые в элементарных функциях.

Трудность интегрального исчисления сравнительно с дифференциальным исчислением состоит в том, что неопределённый интеграл от элементарной функции может не быть элементарной функцией. Даже в тех случаях, когда интеграл выражается через элементарные функции (т. е., как говорят, берётся в конечном виде), нет единых рецептов, которые позволяли бы найти такое выражение. В то же время различные способы интегрирования рассматриваются в курсе математического анализа, существуют обширные таблицы интегралов.

Известны сравнительно немногие общие классы функций, для которых интегрирование может быть выполнено в конечном виде. Обычно их и изучают в курсе высшей школы. В частности, важный класс функций, интегралы от которых берутся в конечном виде, представляют собой рациональные алгебраические функции в виде отношения двух многочленов $\frac{P(x)}{Q(x)}$.

Многие иррациональные алгебраические функции, например, рационально зависящие от $\sqrt{ax^2+bx+c}$ и x или же от x и рациональных степеней дроби $\frac{ax+b}{cx+d}$, также интегрируются в конечном виде. В конечном виде интегрируются и некоторые трансцендентные функции, например, рациональные функции синуса и косинуса.

Доказано, что любая непрерывная на отрезке [a,b] функция f(x) всегда имеет на интервале (a,b) первообразную, в качестве которой можно взять определённый интеграл с переменным верхним пределом: $F(x)=\int_a^x f(t)dt \ \ (a<x<b).$ Поэтому все элементарные функции интегрируемы на всех интервалах, входящих в их области определения. Однако в результате интегрирования далеко не всегда получаются снова элементарные функции, как это имеет место при дифференцировании.

Функции, которые изображаются неопределёнными интегралами, не берущимися в конечном виде, образуют собой новые трансцендентные функции. Многие из них также хорошо изучены и имеют большое значение в приложениях. Для них составлены подробные таблицы значений для различных значений аргумента *x*. К ним относятся, например,

$\int e^{-x^2}dx$ - интеграл Пуассона, или интеграл ошибок (в статистике, в теории теплопроводности),

$\int \sin(x^2)dx, \int \cos(x^2)dx$ - интегралы Френеля (в оптике),

$li(x)=\int \frac{dx}{\ln x}$ - интегральный логарифм (теория чисел),

$si(x)=\int \frac{\sin x}{x}dx$, $ci(x)=\int \frac{\cos x}{x}dx$ - интегральные синус и косинус,

$ei(x)=\int \frac{e^x}{x}dx$ - интегральная показательная функция.

Не вычисляются в элементарных функциях интегралы

$$\int \frac{e^x}{x^n}dx,\ \int \frac{\sin x}{x^n}dx,\ \int \frac{\cos x}{x^n}dx \qquad (n\in N)$$

и многие другие. Так, интегралы вида

$$\int R\left(x,\sqrt{ax^3+bx^2+cx+\delta}\right)dx,$$

как правило, уже не выражаются в конечном виде через элементарные функции. Функции, сами не являющиеся элементарными, но определяемые через них с помощью аналитических соотношений типа интегрирования и дифференцирования, обычно называют специальными функциями.

Даже если интеграл не поддаётся аналитическому вычислению, его можно рассчитать приближённо с некоторой степенью точности. Так, в курсе вычислительных методов изучаются специальные способы приближённого вычисления интегралов с помощью различных разностных схем (методы прямоугольников, трапеций, парабол, сплайн-аппроксимация и пр. подходы).

§3. Основные свойства неопределенного интеграла.

1. Дифференциал от неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению, а производная неопределенного интеграла равна подынтегральной функции (это свойство непосредственно вытекает из определения интеграла). Таким образом, имеем

$$d\left(\int f(x)dx\right)=f(x)dx; \qquad \text{и} \qquad \left(\int f(x)dx\right)'=(F(x)+C)'=f(x);$$

2. Неопределенный интеграл от дифференциала некоторой функции равен сумме этой функции и произвольной постоянной.

$$\int d\,f(x)=\int f'(x)dx=f(x)+C\ .$$

(Это свойство отражает взаимно обратный характер операций интегрирования дифференцирования)

3. Отличный от нуля постоянный множитель можно выносить за знак неопределенного интеграла, т. е. если постоянная С≠0, то
$$\int C\cdot f(x)dx = C\cdot\int f(x)dx;$$
4. Неопределенный интеграл от алгебраической суммы конечного числа функций равен такой же алгебраической сумме неопределенных интегралов от этих функций
$$\int[f(x)+g(x)+h(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx + \int h(x)dx.$$

Свойства 3 и 4 отражают свойство линейности неопределённого интеграла, причём эти равенства носят условный характер: они выполняются лишь с точностью до произвольной константы. Следующее свойство 5 показывает, что приведённая ниже таблица интегралов справедлива независимо от того, является ли переменная интегрирования независимой переменной или функцией.

5. Инвариантность формулы интегрирования. Если $\int f(x)dx = F(x)+C$ и $u=\phi(x)$ - непрерывно дифференцируема, то $\int f(u)du = F(u)+C$.
6. Одна из первообразных чётной функции есть функция нечётная, а всякая первообразная нечётной функции есть функция чётная.

Рассмотрим далее табличные интегралы и наиболее общие методы вычисления неопределённых интегралов. К ним традиционно относят следующие: сведение интеграла к простейшим интегралам при помощи тождественных преобразований и использования свойств интегралов, метод замены переменной и интегрирование по частям. Обратим внимание на то, что приписывать константу С в неопределённом интеграле нужно обязательно, в противном случае вы находите лишь одну из первообразных, и это считается весьма грубой ошибкой. Заметим также, что ниже мы будем говорить об интегралах только для непрерывных функций. Если же функция имеет точки разрыва, то рассматривать её будем лишь в промежутках её непрерывности, где интеграл от неё существует.

Пример 2. $\int(x^2-2\sin x+1)dx = \int x^2dx - 2\int\sin xdx + \int dx = \frac{1}{3}x^3 + 2\cos x + x + C;$

§4. Таблица простейших неопределенных интегралов.

Отметим, что название «табличный интеграл» является довольно условным. Существует некоторый минимальный набор неопределённых интегралов, к которым наиболее часто сводится вычисление интегралов. В частности, к ним относят интегралы от некоторых известных элементарных функций. По мере того, как вы приобретаете всё больше навыков в вычислении неопределённых интегралов, понятие «табличного интеграла» расширяется, и в условную таблицу попадают многие из вычисленных прежде интегралов. Правильность выполненного интегрирования в случае сомнений всегда можно проверить, продифференцировав полученный результат. Приведём лишь некоторые, наиболее часто употребляемые виды интегралов.

Интегралы от *степенных функций*:	
1. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}+C \quad (n\in R,\ n\neq -1;\ x\in R)$;	2. $\int\frac{dx}{x} = \ln\lvert x\rvert + C \quad (n=-1,\ x\neq 0)$.
Интегралы от *показательных* и, в частности, экспоненциальной ($a = e$) функций:	
3. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a}+C \ (\mathrm{a}>0,\ \mathrm{a}\neq 1,\ \mathrm{x}\in \mathrm{R})$;	$\int e^x dx = e^x + C$
Интегралы от *тригонометрических функций*:	
4. $\int\cos xdx = \sin x + C \quad (x\in R)$;	5. $\int\sin xdx = -\cos x + C \quad (x\in R)$;
6. $\int\frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C \quad (x\neq\frac{\pi}{2}+\pi n,\quad n\in Z)$	7. $\int\frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C \quad (x\neq\pi n,\quad n\in Z)$
Интегралы от *рациональных функций*:	

8. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \begin{cases} arctgx + C \\ -arcctgx + C \end{cases}$ ($x \in R$; этот интеграл подразумевает двоякую форму записи; в зависимости от ситуации можно использовать как первое, так и второе его представление); 9. $\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \begin{cases} \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + C \\ -\frac{1}{a} arcctg \frac{x}{a} + C \end{cases} \quad (x \in R);$ здесь и ниже параметр a считаем положительным; 10. $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left\|\frac{x-a}{x+a}\right\| + C \quad (x \neq \pm a).$
Интегралы от *иррациональных функций*: 11. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} \arcsin x + C \\ -\arccos x + C \end{cases} \quad (\|x\| < 1);$ 12. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \begin{cases} \arcsin \frac{x}{a} + C \\ -\arccos \frac{x}{a} + C \end{cases} \quad (\|x\| < a);$ 13. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left\|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right\| + C \quad (x^2 \pm a^2 > 0);$ 14. $\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + C \quad (\|x\| \le a);$ 15. $\int \sqrt{a^2+x^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2+x^2} + \frac{a^2}{2}\ln\left\|x + \sqrt{a^2+x^2}\right\| + C.$
Интегралы от *гиперболических функций*: 16. $\int chxdx = shx + C \quad (x \in R);$ 17. $\int shxdx = chx + C \quad (x \in R);$ 18. $\int \frac{dx}{ch^2x} = thx + C \quad (x \in R);$ 19. $\int \frac{dx}{sh^2x} = cthx + C \quad (x \neq 0).$

Существуют специальные таблицы неопределённых интегралов, содержащие большое количество ныне известных интегралов, к которым можно обращаться в случае необходимости.

§5. Основные методы интегрирования.

Практически любой неопределённый интеграл вычисляется путём его упрощения и сведения в итоге к табличному (табличным) интегралу. Специфика используемых при этом математических средств позволяет отнести к основным методам интегрирования следующие три способа интегрирования:

– использование алгебраических, тригонометрических и прочих преобразований, а также свойств интегралов (метод разложения);

– замена переменной интегрирования (метод введения новой переменной);

– интегрирование по частям.

Заметим, что в любой более-менее сложной задаче обычно в различных комбинациях используются сразу несколько приёмов. В частности, при вычислении интеграла замена переменных (или интегрирование по частям) могут использоваться неоднократно, сопровождаясь упрощающими решение преобразованиями подынтегрального выражения.

§ 5.1 Интегрирование путём сведения к табличным интегралам с помощью различных преобразований

Иногда интеграл удаётся вычислить с помощью различных алгебраических, тригонометрических и других преобразований подынтегрального выражения и используя свойство линейности интегралов. К преобразованиям такого рода относят обычно следующие:

– добавление (с одновременным вычитанием) к подынтегральной функции константы или некоторого выражения; обычно за этим следует разбиение интеграла в сумму более простых интегралов;

– одновременное умножение или деление числителя и знаменателя дроби под знаком интеграла на некоторое выражение; например, при интегрировании функций с радикалами часто применяют домножение на сопряжённое выражение;

– выделение полных квадратов (кубов);

– использование формул сокращённого умножения;

– выделение у дроби целой части (часто используется при интегрировании рациональных дробей);

– выделение в числителе дроби производной от знаменателя;

– использование алгебраических тождеств, тригонометрических и гиперболических формул.

Пример 3.

$$\int\left(1-\sqrt{x}\right)^2 dx = \int\left(1-2\sqrt{x}+x\right)dx = \int dx - \int 2\sqrt{x}\,dx + \int x dx = \int dx - 2\int x^{\frac{1}{2}}dx + \int x dx =$$

$$= x - 2\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + \frac{x^2}{2} + C = x - \frac{4}{3}x\sqrt{x} + \frac{x^2}{2} + C$$

Пример 4.

$$\int\frac{x^4-6x^3-8x^2+9x-5}{x^2}dx = \int\left(x^2-6x-8+\frac{9}{x}-\frac{5}{x^2}\right)dx = \int x^2dx - 6\int xdx - 8\int dx +$$

$$+9\int\frac{dx}{x} - 5\int x^{-2}dx = \frac{x^3}{3} - 6\frac{x^2}{2} - 8x + 9\ln|x| - 5\frac{x^{-1}}{-1} + C = \frac{x^3}{3} - 3x^2 + 9\ln|x| + \frac{5}{x} + C$$

Пример 5. Найти неопределенный интеграл: $\int\sin^2 x dx$.

Решение. Так как $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x)$, то

$$\int\sin^2 xdx = \frac{1}{2}\int(1-\cos 2x)dx = \frac{1}{2}\int dx - \frac{1}{4}\int\cos 2x\,d(2x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x + C.$$

Пример 6. Найти неопределенный интеграл: $\int\sin x\cos 3x dx$.

Решение. Так как $\sin x\cos 3x = \frac{1}{2}(\sin 4x - \sin 2x)$, то имеем

$$\int\sin x\cos 3xdx = \frac{1}{2}\int(\sin 4x - \sin 2x)dx = \frac{1}{8}\int\sin 4xd(4x) - \frac{1}{4}\int\sin 2xd(2x) = -\frac{1}{8}\cos 4x + \frac{1}{4}\cos 2x + C$$

Пример 7. Найти неопределенный интеграл: $\int\cos(7x-3)dx.$

Решение. $\int\cos(7x-3)dx. = \frac{1}{7}\int\cos(7x-3)d(7x-3) = \frac{1}{7}\sin(7x-3) + C.$

Пример 8. $\int\frac{x+3}{x+6}dx = \int\frac{x+5-2}{x+5}dx = x - 2\ln|x+5| + C.$

Пример 9.

$$\int\frac{\sqrt{2-x^2}+\sqrt{2+x^2}}{\sqrt{4-x^4}}dx = \int\frac{\sqrt{2-x^2}+\sqrt{2+x^2}}{\sqrt{2-x^2}\sqrt{2+x^2}}dx = \int\frac{dx}{\sqrt{2+x^2}} + \int\frac{dx}{\sqrt{2-x^2}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2+2}\right| + \arcsin\frac{x}{\sqrt{2}} + C.$$

§ 5.2 Метод подстановки (интегрирование заменой переменной).

Рассмотрим один из сильнейших приёмов для интегрирования функций – *метод замены переменной*, или *метод подстановки*. Рассмотрим два возможных случая.

1. ***Внесение функции под знак дифференциала.***

Если подынтегральное выражение $f(x)dx$ представимо в виде $g(t(x))t'(x)dx$, где функция $g(t)$ непрерывна на множестве T , а функция $t = t(x)$ – непрерывна на соответствующем множестве X вместе со своей производной $t'(x)$, то справедлива следующая формула перехода от x к новой переменной интегрирования t :

$$\int f(x)dx = \int g(t(x))\cdot t'(x)dx = \int g(t)dt\,.$$

При этом производная $t'(x)$ вносится под знак дифференциала согласно известному свойству дифференциала $t'(x)dx = d(t(x))$. В простейших случаях, чтобы распознать эту ситуацию, бывает достаточно знания табличных интегралов, например,

$$2xdx = d(x^2),\quad \cos xdx = d(\sin x),\quad \sin xdx = -d(\cos x),$$
$$\frac{dx}{x} = d(\ln x),\ \frac{dx}{x^2+1} = d(arctgx),\ \frac{dx}{2\sqrt{x}} = d(\sqrt{x}),$$

В более сложных случаях могут потребоваться приобретённый ранее опыт и интуиция:

$$\frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}} = d\left(\sqrt{1+x^2}\right),\ \left(1-\frac{1}{x^2}\right)dx = d\left(x+\frac{1}{x}\right) \text{ и т.п.}$$

Замену переменной интегрирования осуществляют в тех случаях, когда получаемая в результате «новая» подынтегральная функция $g(t)$ *удобнее для интегрирования* по сравнению с исходной подынтегральной функцией $f(x)$. Основная сложность этого метода состоит в том, чтобы «увидеть» в исходном подынтегральном выражении $f(x)dx$ более простое для интегрирования выражение $g(t(x))t'(x)dx = g(t)dt$. Практически реализация метода заключается во внесении функции $t'(x)$ под знак дифференциала dx с образованием нового дифференциала dt. Вычислив интеграл $\int g(t)dt = G(t) + C$, в конце необходимо вернуться к первоначальной переменной интегрирования x путём обратной подстановки $t = t(x)$:

$$\int f(x)dx = G(t(x)) + C\,.$$

2. *Использование подстановок.*

Если подынтегральная функция $f(x)$ непрерывна на множестве X, то, полагая $x = x(t)$, где функция $x(t)$ непрерывна на соответствующем множестве T вместе со своей производной $x'(t)$, получим ещё одну формулу перехода от x к новой переменной интегрирования t:

$$\int f(x)dx = \int f(x(t))\cdot x'(t)dt\,.$$

Нередки ситуации, когда для решения одной и той же задачи могут существовать различные подстановки. Умение подобрать наиболее эффективную в данной конкретной ситуации подстановку определяет, в том числе навык интегрирования.

Подчеркнём ещё раз, что замена переменной – наиболее мощный и часто используемый метод при вычислении интегралов от иррациональных и трансцендентных функций. Как правило, подобрать подходящую замену в сложных случаях – целое искусство. В некоторых случаях удаётся сформулировать общие рекомендации по заменам, ориентируясь на конкретный класс интегрируемых функций. Например, разработаны и проверены практикой специальные рационализирующие подстановки при интегрировании иррациональных алгебраических функций; существуют рекомендации по заменам в классе тригонометрических функций.

Пример 10. $\int (2x+1)^{20}dx = \{2x+1=t;\quad dt = 2dx\} = \int t^{20}\cdot\frac{1}{2}dt = \frac{1}{21}t^{21}\cdot\frac{1}{2} + C = \frac{t^{21}}{42} + C = \frac{(2x+1)^{21}}{42} + C$

Пример 11. Найти неопределенный интеграл $\int\sqrt{\sin x}\cos xdx$.

Решение. Полагаем t = sinx, dt = cosxdx. $\int\sqrt{t}dt = \int t^{1/2}dt = \frac{2}{3}t^{3/2} + C = \frac{2}{3}\sin^{3/2}x + C.$

Пример 12. $\int\sqrt[3]{1+\sin x}\cos xdx$

Решение. Полагаем 1+sinx=t , тогда cosxdx=dt и

$$\int\sqrt[3]{1+\sin x}\cos xdx = \int t^{1/3}dt = \frac{t^{4/3}}{4/3} + C = \frac{3}{4}\sqrt[3]{(1+\sin x)^4} + C$$

Пример 13.

$$\int\frac{\cos x}{\sqrt{\sin^3 x}}dx = \int\sin^{-3/2}x\cos xdx = \{\sin x = t;\, dt = \cos xdx\} = \int t^{-3/2}dt = -2t^{-1/2} + C = -2\sin^{-1/2}x + C = -\frac{2}{\sqrt{\sin x}} + C.$$

Пример 14. Найти неопределенный интеграл $\int x(x^2+1)^{3/2}dx$.

Решение. Полагаем $t = x^2+1;\ dt = 2xdx; \Rightarrow dx = \frac{dt}{2x};$ Получаем:

$$\int t^{3/2}\frac{dt}{2}=\frac{1}{2}\int t^{3/2}dt=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}t^{5/2}+C=\frac{t^{5/2}}{5}+C=\frac{(x^2+1)^{5/2}}{5}+C;$$

Пример 15. Найти $\int x\sqrt{x-5}dx$.

Решение. Чтобы избавиться от корня, полагаем $\sqrt{x-5}=t$. Отсюда $x=t^2+5$ и, следовательно, $dx=2tdt$. Производя подстановку, последовательно имеем

$$\int x\sqrt{x-5}dx=\int\left(t^2+5\right)t\cdot 2tdt=\int\left(2t^4+10t^2\right)dt=2\int t^4dt+10\int t^2dt==2\frac{t^5}{5}+10\frac{t^3}{3}+C=\frac{2}{5}(x-5)^{\frac{5}{2}}+\frac{10}{3}(x-5)^{\frac{3}{2}}+C$$

Пример 16.

$$\int\frac{dx}{(x+1)\sqrt{x}}=\left\{\sqrt{x}=t;\quad \frac{dt}{dx}=\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{1}{2t}\right\}=\int\frac{2tdt}{(t^2+1)t}=2\int\frac{dt}{t^2+1}=2arctgt+C=2arctg\sqrt{x}+C.$$

Пример 17. $\int\frac{e^x dx}{e^{2x}-1}=\int\frac{d(e^x)}{(e^x)^2-1}=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{e^x-1}{e^x+1}\right|+C$

Пример 18.

$$\int e^{\cos^2 x}\sin 2xdx=\left\{t=e^{\cos^2 x};\quad dt=-e^{\cos^2 x}\cdot 2\cos x\sin x=-\sin 2x\cdot e^{\cos^2 x}dx;\right\}=-\int dt=-t+C=-e^{\cos^2 x}+C.$$

Пример 19. Найти $\int\left(\ln x+\frac{1}{\ln x}\right)\frac{dx}{x}$.

Решение. Так как $\frac{dx}{x}=d(\ln x)$, то имеем $\int\left(\ln x+\frac{1}{\ln x}\right)\frac{dx}{x}=\int\ln xd(\ln x)+\int\frac{d(\ln x)}{\ln x}=\frac{1}{2}\ln^2 x+\ln\left|\ln x\right|+C$

Пример 20. $\int\frac{dx}{x\ln x\ln(\ln x)}=\int\frac{d\ln(\ln x)}{\ln(\ln x)}=\ln\left|\ln(\ln x)\right|+C$

Пример 21.

$$\int\sqrt{a^2-x^2}dx=\left|\begin{matrix}x=a\sin t\\ dx=a\cos tdt\end{matrix}\right|=\int a^2\sqrt{1-\sin^2 t}\cos tdt=a^2\int\cos^2 tdt=\frac{a^2}{2}\int(1+\cos 2t)dt=\frac{a^2}{2}\left(t+\frac{\sin 2t}{2}\right)+C=\frac{a^2}{2}\left(\arcsin\frac{x}{a}+\frac{x}{a}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\right)+C$$

Пример 22.

$$\int\frac{dx}{\sqrt{-x^2-2x+8}}=\int\frac{dx}{\sqrt{-x^2-2x-1+9}}=\{dx=d(x+1)\}=\int\frac{d(x+1)}{\sqrt{9-(x+1)^2}}=\{x+1=t\}=\int\frac{dt}{\sqrt{3^2-t^2}}=\arcsin\frac{t}{3}+C=\arcsin\frac{x+1}{3}+C.$$

Пример 23. $\int\frac{dx}{x^2-6x+25}=\int\frac{dx}{(x-3)^2+16}=\frac{1}{16}\int\frac{dx}{\left(\frac{x-3}{4}\right)^2+1}=\frac{1}{16}arctg\left(\frac{x-3}{4}\right)+C.$

§ 5.3 Метод интегрирования по частям.

Если $u(x)$ и $v(x)$ – дифференцируемые на одном и том же множестве функции и существует первообразная для функции $u(x)v'(x)$, то существует и первообразная для функции $v(x)u'(x)$, причём справедлива формула интегрирования по частям:

$$\int u(x)v'(x)dx=u(x)v(x)-\int v(x)u'(x)dx$$

или, в краткой форме,

$$\int udv=uv-\int vdu.$$

В качестве *u* обычно выбирается функция, которая упрощается дифференцированием, в качестве *dv* – оставшаяся часть подынтегрального выражения, содержащая dx, из которой можно определить *v* путём интегрирования.

Вывод этой формулы основан на известной формуле производной произведения: $(uv)'=u'v+v'u$, где u и v – некоторые функции от x. В дифференциальной форме: $d(uv)=udv+vdu$. Проинтегрировав, получаем: $\int d(uv)=\int udv+\int vdu$, а в соответствии с приведенными выше свойствами неопределенного интеграла: $uv=\int udv+\int vdu$ или $\int udv=uv-\int vdu$.

Данный метод используют в тех случаях, когда интеграл в правой части формулы вычисляется проще исходного интеграла (в левой части). Как правило, формула применяется в ситуациях, когда подынтегральная функция представляет собой произведение «разнородных» функций, например, алгебраической и трансцендентной функций. В целом интегрирование по частям имеет более ограниченную область применения, чем замена переменной.

Укажем некоторые типы интегралов, которые удобно вычислять методом интегрирования по частям.

1. Интегралы вида $\int P(x)e^{kx}\,dx$, $\int P(x)\cdot\sin kx\,dx$, $\int P(x)\cos kx\,dx$, где $P(x)$ — многочлен, k — число. Удобно положить $u = P(x)$, а за dv обозначить все остальные сомножители.

2. Интегралы вида $\int P(x)\arcsin x\,dx$, $\int P(x)\arccos x\,dx$, $\int P(x)\ln x\,dx$, $\int P(x)\,\mathrm{arctg}\,x\,dx$, $\int P(x)\,\mathrm{arcctg}\,x\,dx$. Удобно положить $P(x)\,dx = dv$, а за u обозначить остальные сомножители.

3. Интегралы вида $\int e^{ax}\cdot\sin bx\,dx$, $\int e^{ax}\cdot\cos bx\,dx$, где a и b — числа. За u можно принять функцию $u = e^{ax}$.

В некоторых случаях для получения результата приходится несколько раз интегрировать по частям, постепенно упрощая задачу. Иногда на каком-то этапе обнаруживается, что исходный интеграл выражается через некоторые функции и себя самого, тогда его вычисляют, выражая из данного равенства (рассматривая равенство как уравнение относительно искомого интеграла).

Пример 24.

$$\int x^2e^{5x}dx = \left\{\begin{matrix} u = x^2; & dv = e^{5x}dx; \\ du = 2xdx; & v = \dfrac{e^{5x}}{5}; \end{matrix}\right\} = \frac{1}{5}e^{5x}x^2 - \int\frac{1}{5}e^{5x}2xdx = \frac{x^2e^{5x}}{5} - \frac{2}{5}\int xe^{5x}dx = \left\{\begin{matrix} u = x; & dv = e^{5x}dx; \\ du = dx; & v = \dfrac{1}{5}e^{5x}; \end{matrix}\right\} =$$

$$= \frac{x^2e^{5x}}{5} - \frac{2}{5}\left[\frac{xe^{5x}}{5} - \int\frac{1}{5}e^{5x}dx\right] = \frac{x^2e^{5x}}{5} - \frac{2xe^{5x}}{25} + \frac{2}{25}\int e^{5x}dx = \frac{x^2e^{5x}}{5} - \frac{2xe^{5x}}{25} + \frac{2e^{5x}}{125} = \frac{e^{5x}}{5}\left(x^2 - \frac{2x}{5} + \frac{2}{25}\right).$$

Пример 25. Найти $\int(x^2+2x)\cos 2xdx$

$$\int(x^2+2x)\cos 2xdx = \left|\begin{matrix} u = x^2+2x, du = (2x+2)dx \\ dv = \cos 2xdx, v = \int\cos 2xdx = 1/2\sin 2x \end{matrix}\right| = 1/2(x^2+2x)\sin 2x - \int(x+1)\sin 2xdx$$

$$= \left|\begin{matrix} u = x+1, du = dx \\ dv = \sin 2xdx, v = -1/2\cos 2x \end{matrix}\right| = \frac{1}{2}(x^2+2x)\sin 2x + \frac{1}{2}(x+1)\cos 2x + 1/4\sin 2x + C.$$

Пример 26.

$$\int\frac{\ln x}{x^3}dx = \left\{\begin{matrix} u = \ln x; dv = \dfrac{1}{x^3}dx; \\ du = \dfrac{1}{x}dx; v = -\dfrac{1}{2x^2} \end{matrix}\right\} = -\frac{\ln x}{2x^2} - \int -\frac{1}{2x^2}\cdot\frac{1}{x}dx = -\frac{\ln x}{2x^2} + \frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^3} = -\frac{\ln x}{2x^2} + \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{2}x^{-2}\right] + C = -\frac{\ln x}{2x^2} - \frac{1}{4x^2} + C.$$

Пример 27.

$$\int e^{2x}\cos xdx = \left\{\begin{matrix} u = e^{2x}; & du = 2e^{2x}dx; \\ dv = \cos xdx; & v = \sin x \end{matrix}\right\} = e^{2x}\sin x - \int\sin x\cdot 2e^{2x}dx = \left\{\begin{matrix} u = e^{2x}; & du = 2e^{2x}dx; \\ dv = \sin xdx; & v = -\cos x; \end{matrix}\right\} =$$

$$= e^{2x}\sin x - 2\left[-e^{2x}\cos x - \int -\cos x\cdot 2e^{2x}dx\right] = e^{2x}\sin x + 2e^{2x}\cos x - 4\int e^{2x}\cos x\,dx$$

Видно, что в результате повторного применения интегрирования по частям функцию не удалось упростить к табличному виду. Однако, последний полученный интеграл ничем не отличается от исходного. Поэтому перенесем его в левую часть равенства.

$$5\int e^{2x}\cos x dx = e^{2x}(\sin x + 2\cos x) \;\Rightarrow \int e^{2x}\cos x dx = \frac{e^{2x}}{5}(\sin x + 2\cos x) + C.$$

Пример 28. $\int x^2 \sin x dx = \left\{\begin{matrix} u = x^2; & dv = \sin x dx; \\ du = 2x dx; & v = -\cos x \end{matrix}\right\} = -x^2\cos x + \int \cos x \cdot 2x dx =$

$$= \left\{\begin{matrix} u = x; & dv = \cos x dx; \\ du = dx; & v = \sin x \end{matrix}\right\} = -x^2\cos x + 2\left[x\sin x - \int \sin x dx\right] = -x^2\cos x + 2x\sin x + 2\cos x + C.$$

Как видно, последовательное применение формулы интегрирования по частям позволяет постепенно упростить функцию и привести интеграл к табличному.

Пример 29.

$$\int x\ln x dx = \left\{\begin{matrix} u = \ln x; & dv = x dx; \\ du = \frac{1}{x}dx; & v = \frac{x^2}{2}; \end{matrix}\right\} = \frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}dx = \frac{x^2\ln x}{2} - \frac{1}{2}\int x dx = \frac{x^2\ln x}{2} - \frac{x^2}{4} + C = \frac{x^2}{4}(2\ln x - 1) + C.$$

§6. Интегрирование рациональных функций.

Идея интегрирования рациональных дробей при помощи разложения их на простейшие дроби принадлежит, как отмечалось выше, *Г. Лейбницу* (1702–1703). Рассмотрим общий подход к интегрированию рациональных дробей, т. е. функций вида $\frac{P(x)}{Q(x)}$, где $P(x)$ и $Q(x)$ – целые алгебраические многочлены от x. Этот подход обычно применяют в случае, когда нет более простых приёмов, позволяющих вычислить интеграл.

§6.1 Интегрирование элементарных дробей.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Элементарными (простейшими)* называются рациональные дроби следующих четырех типов:

$$\text{I. } \frac{1}{ax+b}; \qquad \text{II. } \frac{1}{(ax+b)^m}; \qquad \text{III. } \frac{Mx+N}{ax^2+bx+c}; \qquad \text{IV. } \frac{Mx+N}{(ax^2+bx+c)^n}$$

m, n – натуральные числа ($m \geq 2$, $n \geq 2$), $a, b, c \in R$ и $b^2 - 4ac < 0$ (в III, IV случае).

Первые два типа интегралов от элементарных дробей довольно просто приводятся к табличным подстановкой $t = ax + b$.

I. $$\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a}\int \frac{dt}{t} = \frac{1}{a}\ln|t| + C = \frac{1}{a}\ln|ax+b| + C.$$

II. $$\int \frac{dx}{(ax+b)^m} = \frac{1}{a}\int \frac{dt}{t^m} = -\frac{1}{a(m-1)t^{m-1}} + C = -\frac{1}{a(m-1)(ax+b)^{m-1}} + C;$$

Интеграл дроби вида III может быть представлен в виде:

$$\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx = \int \frac{\frac{A}{2}(2x+p) + \left(B - \frac{Ap}{2}\right)}{x^2+px+q}dx = \frac{A}{2}\int \frac{2x+p}{x^2+px+q}dx + \left(B - \frac{Ap}{2}\right)\int \frac{dx}{x^2+px+q} =$$

$$= \frac{A}{2}\ln\left|x^2+px+q\right| + \left(B - \frac{Ap}{2}\right)\int \frac{dx}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + \left(q - \frac{p^2}{4}\right)} = \frac{A}{2}\ln\left|x^2+px+q\right| + \frac{2B-Ap}{\sqrt{4q-p^2}}\,arctg\,\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}} + C$$

Рассмотрим теперь методы интегрирования простейших дробей IV типа.

Сначала рассмотрим частный случай при M = 0, N = 1. Тогда интеграл вида $\int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^n}$ можно путем выделения в знаменателе полного квадрата представить в виде $\int \frac{du}{(u^2+s)^n}$.

Сделаем следующее преобразование:

$$\int\frac{du}{(u^2+s)^n}=\frac{1}{s}\int\frac{s+u^2-u^2}{(u^2+s)^n}du=\frac{1}{s}\int\frac{du}{(u^2+s)^{n-1}}-\frac{1}{s}\int\frac{u^2du}{(u^2+s)^n}.$$

Второй интеграл, входящий в это равенство, будем брать по частям. Обозначим:

$$\left\{\begin{array}{l} dv_1=\dfrac{udu}{(u^2+s)^n};\quad u_1=u;\quad du_1=du; \\ v_1=\displaystyle\int\frac{udu}{(u^2+s)^n}=-\frac{1}{2(n-1)(u^2+s)^{n-1}}; \end{array}\right\}$$

$$\int\frac{u^2du}{(u^2+s)^n}=-\frac{u}{(2n-2)(u^2+s)^{n-1}}+\frac{1}{2n-2}\int\frac{du}{(u^2+s)^{n-1}};$$

Для исходного интеграла получаем:

$$\int\frac{du}{(u^2+s)^n}=\frac{1}{s}\int\frac{du}{(u^2+s)^{n-1}}+\frac{u}{s(2n-2)(u^2+s)^{n-1}}-\frac{1}{s(2n-2)}\int\frac{du}{(u^2+s)^{n-1}}$$

$$\int\frac{du}{(u^2+s)^n}=\frac{u}{s(2n-2)(u^2+s)^{n-1}}+\frac{2n-3}{s(2n-2)}\int\frac{du}{(u^2+s)^{n-1}}.$$

Полученная формула называется ***рекуррентной***. Если применить ее n-1 раз, то получится табличный интеграл $\int\frac{du}{u^2+s}$.

Вернемся теперь к интегралу от элементарной дроби вида IV в общем случае.

$$\int\frac{Mx+N}{(ax^2+bx+c)^n}dx=(4a)^n\int\frac{Mx+N}{\left[(2ax+b)^2+(4ac-b^2)\right]^n}dx=\left\{\begin{array}{ll} u=2ax+b; & du=2adx; \\ x=\dfrac{u-b}{2a}; & s=4ac-b^2; \end{array}\right\}=$$

$$=\frac{(4a)^n}{2a}\int\frac{\frac{M(u-b)}{2a}+N}{(u^2+s)^n}du=\frac{(4a)^n}{2a}\left[\frac{M}{2a}\int\frac{udu}{(u^2+s)^n}+\frac{2aN-Mb}{2a}\int\frac{du}{(u^2+s)^n}\right]$$

В полученном равенстве первый интеграл с помощью подстановки $t = u^2 + s$ приводится к табличному $\int\frac{dt}{t^n}$, а ко второму интегралу применяется рассмотренная выше рекуррентная формула.

Несмотря на кажущуюся сложность интегрирования элементарной дроби вида IV, на практике его достаточно легко применять для дробей с небольшой степенью n, а универсальность и общность подхода делает возможным очень простую реализацию этого метода на компьютере.

Пример 30. Найти интеграл $\int\frac{3x-1}{x^2-4x+8}dx$.

Решение. $$\int\frac{3x-1}{x^2-4x+8}dx=\int\frac{\frac{3}{2}(2x-4)-1+6}{x^2-4x+8}dx=\frac{3}{2}\int\frac{2x-4}{x^2-4x+8}dx+5\cdot\int\frac{dx}{x^2-4x+8}=$$

$$=\frac{3}{2}\int\frac{d(x^2-4x+8)}{x^2-4x+8}+5\cdot\int\frac{dx}{(x-2)^2+4}=\frac{3}{2}\ln(x^2-4x+8)+\frac{5}{2}arctg\frac{x-2}{2}+C.$$

Пример 31.

$$\int\frac{5x-3}{x^2+6x-40}dx=\int\frac{5x-3}{(x+3)^2-49}dx=\left\{\begin{array}{ll} u=x+3; & du=dx; \\ x=u-3; & \end{array}\right\}=\int\frac{5u-15-3}{u^2-49}du=5\int\frac{udu}{u^2-49}-$$

$$-18\int\frac{du}{u^2-49}=\frac{5}{2}\ln\left|u^2-49\right|-\frac{18}{14}\ln\left|\frac{u-7}{u+7}\right|+C=\frac{5}{2}\ln\left|x^2+6x-40\right|-\frac{9}{7}\ln\left|\frac{x-4}{x+10}\right|+C.$$

§6.2 Интегрирование рациональных дробей.

Функция вида

$$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n,$$

где n — натуральное число, a_i $(i = 0, 1, \ldots, n)$ — постоянные коэффициенты, называется ***многочленом*** (или ***целой рациональной функцией***). Число n называется ***степенью*** многочлена.

Рациональной дробью **называется выражение вида $\frac{P(x)}{Q(x)}$, где $P(x)$ и $Q(x)$ — многочлены.**

Рациональная дробь $\frac{P(x)}{Q(x)}$ называется *правильной*, если степень многочлена $P(x)$ в ее числителе меньше степени многочлена $Q(x)$ в знаменателе. В противном случае дробь называется *неправильной*.

Всякая неправильная рациональная дробь $\frac{P(x)}{Q(x)}$ с помощью деления числителя на знаменатель приводится к виду

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = P_0(x) + \frac{P_1(x)}{Q_1(x)}, \text{ где}$$

$P_0(x)$ — многочлен (целая часть при делении), а $\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}$ — правильная рациональная дробь (остаток).

Поэтому $\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx = \int P_0(x)\,dx + \int \frac{P_1(x)}{Q_1(x)}\,dx$.

Так как интеграл $\int P_0(x)\,dx$ вычисляется элементарно (сводится к сумме табличных), то интегрирование неправильной дроби сводится к интегрированию правильной дроби. Интегрирование правильной рациональной дроби сводится, в свою очередь, к интегрированию простейших дробей.

Теорема.

Каждая правильная рациональная дробь может быть представлена в виде суммы простейших дробей указанных четырех типов. А именно: если знаменатель данной правильной дроби $\frac{P(x)}{Q(x)}$ разложен на неповторяющиеся линейные и квадратные множители

$$Q(x) = (x-a_1)^{k_1} \cdot (x-a_2)^{k_2} \cdot \ldots \cdot (x-a_n)^{k_n} \cdot (x^2 + p_1x + q_1)^{r_1} \cdot \ldots \times \\ \times (x^2 + p_mx + q_m)^{r_m},$$

где $k_1, k_2, \ldots k_n, r_1, r_2, \ldots r_m$ — натуральные числа, то эту дробь можно представить в виде следующей суммы простейших:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{(x-a_1)^{k_1}} + \frac{A_2}{(x-a_1)^{k_1-1}} + \ldots + \frac{A_{k_1}}{(x-a_1)} + \ldots + \frac{B_1x + C_1}{(x^2+p_1x+q_1)^{r_1}} + \\ + \frac{B_2x+C_2}{(x^2+p_1x+q_1)^{r_1-1}} + \ldots + \frac{B_{r_1}x + C_{r_1}}{x^2+p_1x+q_1} + \ldots.$$

Коэффициенты $A_1, A_2, \ldots, B_1, C_1, \ldots, B_{r_1}, C_{r_1}, \ldots$ в разложении находятся с помощью метода неопределенных коэффициентов или метода частных значений. Суть метода неопределенных коэффициентов состоит в следующем: все простейшие дроби в правой части предыдущего равенства приводятся к общему знаменателю (этим знаменателем будет многочлен $Q(x)$, как и в левой части). При этом в числителе полученной в результате дроби окажется некоторый многочлен $T(x)$, у которого коэффициенты при различных степенях x

зависят от неизвестных $A_1, A_2, \ldots, B_1, C_1, \ldots, B_{r_1}, C_{r_1}, \ldots$ Поскольку две рациональные дроби $\frac{P(x)}{Q(x)}$ и $\frac{T(x)}{Q(x)}$ с одинаковыми знаменателями тождественно равны (т.е. равны сразу при всех допустимых значениях x) тогда и только тогда, когда равны их числители, то осталось записать условие тождественного равенства многочленов $P(x)$ и $T(x)$. В свою очередь, два многочлена тождественно равны тогда и только тогда, когда равны их степени и коэффициенты при одинаковых степенях x. Приравнивая эти коэффициенты, составляют систему алгебраических уравнений, в которой количество неизвестных (неопределённых коэффициентов) совпадает с количеством уравнений системы. Затем эта система решается (достаточно подобрать одно какое-либо решение) и, таким образом, неопределённые ранее коэффициенты оказываются найденными.

Таким образом, интегрируя правильную дробь, мы сначала раскладываем ее на сумму простейших, а затем интегрируем каждое слагаемое в этом разложении.

Итак, сформулируем общее правило интегрирования рациональных дробей.

1. Если дробь неправильна, то представить ее в виде суммы многочлена и правильной дроби;

2. Разложив знаменатель правильной рациональной дроби на множители, представить ее в виде суммы простейших рациональных дробей;

3. Проинтегрировать многочлен и полученную сумму простейших дробей.

<u>**Пример 32.**</u> Найти интеграл $\int \frac{9x^3 - 30x^2 + 28x - 88}{(x^2 - 6x + 8)(x^2 + 4)} dx$.

Решение. Так как $(x^2 - 6x + 8)(x^2 + 4) = (x-2)(x-4)(x^2+4)$, то

$$\frac{9x^3 - 30x^2 + 28x - 88}{(x-2)(x-4)(x^2+4)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-4} + \frac{Cx+D}{x^2+4}$$

Приводя к общему знаменателю и приравнивая соответствующие числители, получаем:

$$A(x-4)(x^2+4) + B(x-2)(x^2+4) + (Cx+D)(x^2-6x+8) = 9x^3 - 30x^2 + 28x - 88 \quad \Rightarrow$$

$$(A+B+C)x^3 + (-4A-2B-6C+D)x^2 + (4A+4B+8C-6D)x + (-16A-8B+8D) = 9x^3 - 30x^2 + 28x - 88.$$

$$\begin{cases} A+B+C=9 \\ -4A-2B-6C+D=-30 \\ 4A+4B+8C-6D=28 \\ -16A-8B+8D=-88 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C=9-A-B \\ D=-30+4A+2B+54-6A-6B \\ 2A+2B+4C-3D=14 \\ 2A+B-D=11 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C=9-A-B \\ D=24-2A-4B \\ 2A+2B+36-4A-4B-72+6A+12B=14 \\ 2A+B-24+2A+4B=11 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} C=9-A-B \\ D=24-2A-4B \\ 4A+10B=50 \\ 4A+5B=35 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C=9-A-B \\ D=24-2A-4B \\ 4A+10B=50 \\ 50-10B+5B=35 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C=9-A-B \\ D=24-2A-4B \\ 4A+10B=50 \\ B=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=5 \\ B=3 \\ C=1 \\ D=2 \end{cases}$$

Окончательно имеем:

$$\int \frac{5}{x-2}dx + \int \frac{3}{x-4}dx + \int \frac{x+2}{x^2+4}dx = 5\ln|x-2| + 3\ln|x-4| + \int \frac{x}{x^2+4}dx + \int \frac{2}{x^2+4}dx =$$

$$= 5\ln|x-2| + 3\ln|x-4| + \frac{1}{2}\ln(x^2+4) + arctg\frac{x}{2} + C.$$

<u>**Пример 33.**</u> Найти интеграл $\int \frac{6x^5 - 8x^4 - 25x^3 + 20x^2 - 76x - 7}{3x^3 - 4x^2 - 17x + 6} dx$

Решение. Так как дробь неправильная, то предварительно следует выделить у нее целую часть:

$$\begin{array}{r|l} -\ 6x^5 - 8x^4 - 25x^3 + 20x^2 - 76x - 7 & 3x^3 - 4x^2 - 17x + 6 \\ \underline{6x^5 - 8x^4 - 34x^3 + 12x^2} \qquad\qquad & 2x^2 + 3 \\ -\ 9x^3 + 8x^2 - 76x - 7 & \\ \underline{9x^3 - 12x^2 - 51x + 18} & \end{array}$$

$$20x^2-25x-25$$

$$\int\left[2x^2+3+\frac{20x^2-25x-25}{3x^3-4x^2-17x+6}\right]dx=\int 2x^2dx+\int 3dx+5\int\frac{4x^2-5x-5}{3x^3-4x^2-17x+6}dx=\frac{2}{3}x^3+3x+5\int\frac{4x^2-5x-5}{3x^3-4x^2-17x+6}dx$$

Разложим знаменатель полученной дроби на множители. Видно, что при x = 3 знаменатель дроби превращается в ноль. Тогда:

$$\begin{array}{r|l} 3x^3-4x^2-17x+6 & x-3 \\ \underline{3x^3-9x^2} & 3x^2+5x-2 \\ 5x^2-17x & \\ \underline{5x^2-15x} & \\ -2x+6 & \\ \underline{-2x+6} & \\ 0 & \end{array}$$

Таким образом $3x^3-4x^2-17x+6=(x-3)(3x^2+5x-2)=(x-3)(x+2)(3x-1)$. Тогда:

$$\frac{4x^2-5x-5}{(x-3)(x+2)(3x-1)}=\frac{A}{x-3}+\frac{B}{x+2}+\frac{C}{3x-1}\Rightarrow$$

$$A(x+2)(3x-1)+B(x-3)(3x-1)+C(x-3)(x+2)=4x^2-5x-5$$

Для того, чтобы избежать при нахождении неопределенных коэффициентов раскрытия скобок, группировки и решения системы уравнений (которая в некоторых случаях может оказаться достаточно большой) применяют так называемый метод произвольных значений. Суть метода состоит в том, что в полученное выше выражение подставляются поочередно несколько (по числу неопределенных коэффициентов) произвольных значений x. Для упрощения вычислений принято в качестве произвольных значений принимать точки, при которых знаменатель дроби равен нулю, т.е. в нашем случае – 3, -2, 1/3. Получаем:

$$\begin{cases}40A=16\\35B=21\\C=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=2/5\\B=3/5\\C=1\end{cases}$$ Окончательно получаем:

$$\int\frac{6x^5-8x^4-25x^3+20x^2-76x-7}{3x^3-4x^2-17x+6}dx=\frac{2}{3}x^3+3x+3\int\frac{dx}{x+2}+2\int\frac{dx}{x-3}+5\int\frac{dx}{3x-1}=$$

$$=\frac{2}{3}x^3+3x+3\ln|x+2|+2\ln|x-3|+\frac{5}{3}\ln|3x-1|+C.$$

<u>Пример 34.</u> $$\int\frac{3x^4+14x^2+7x+15}{(x+3)(x^2+2)^2}dx=\int\frac{A}{x+3}dx+\int\frac{Bx+C}{(x^2+2)^2}dx+\int\frac{Dx+E}{x^2+2}dx$$

Найдем неопределенные коэффициенты:

$$A(x^2+2)^2+(Bx+C)(x+3)+(Dx+E)(x+3)(x^2+2)=3x^4+14x^2+7x+15$$

$$Ax^4+4Ax^2+4A+Bx^2+3Bx+Cx+3C+Dx^4+2Dx^2+3Dx^3+6Dx+Ex^3+2Ex+3Ex^2+6E=$$

$$=(D+A)x^4+(3D+E)x^3+(A+B+2D+3E+4A)x^2+(3B+C+6D+2E)x+(2A+3C+6E+4A)$$

$$\begin{cases}D+A=3\\3D+E=0\\B+2D+3E+4A=14\\3B+C+6D+2E=7\\3C+6E+4A=15\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}D=3-A\\E=-9+3A\\B+6-2A-27+9A+4A=14\\3B+C+18-6A-18+6A=7\\3C-54+18A+4A=15\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}D=3-A\\E=-9+3A\\B+11A=35\\3B+C=7\\3C+22A=69\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}D=3-A\\E=-9+3A\\11A=35-B\\C=7-3B\\21-9B+70-2B=69\end{cases}\Rightarrow$$

$$\begin{cases}A=3\\B=2\\C=1\\D=0\\E=0\end{cases}$$ Тогда значение заданного интеграла:

$$3\int\frac{dx}{x+3}+\int\frac{2x+1}{(x^2+2)^2}dx=3\int\frac{dx}{x+3}+2\int\frac{x}{(x^2+2)^2}dx+\int\frac{dx}{(x^2+2)^2}=3\ln|x+3|-\frac{1}{x^2+2}+\frac{x}{4(x^2+2)}+\frac{1}{4\sqrt{2}}arctg\frac{x}{\sqrt{2}}+C.$$

Пример 35. Найти интеграл $\int \frac{dx}{x^5 - x^2}$.

Решение. Разложим знаменатель на множители: $x^5 - x^2 = x^2(x-1)(x^2+x+1)$. На основании теоремы о разложении правильной дроби в сумму простейших дробей имеем:

$$\int \frac{dx}{x^5 - x^2} = \int \frac{dx}{x^2(x-1)(x^2+x+1)} = \int \left(\frac{A}{x^2} + \frac{B}{x} + \frac{C}{x-1} + \frac{Dx+E}{x^2+x+1} \right) dx .$$

Приведя дроби в обеих частях последнего равенства к общему знаменателю, получим:

$$1 = A(x-1)(x^2+x+1) + Bx(x-1)(x^2+x+1) + Cx^2(x^2+x+1) + (Dx+E)x^2(x-1).$$

Перепишем предыдущее равенство в виде:

$$1 = A(x-1)(x^2+x+1) + Bx(x-1)(x^2+x+1) + Cx^2(x^2+x+1) + (Dx+E)x^2(x-1).$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях, получаем систему уравнений

$$\begin{array}{c|c} x^4 & B + C + D = 0 \\ x^3 & A + C - D + E = 0 \\ x^2 & C - E = 0 \\ x & -B = 0 \\ x^0 & -A = 1 \end{array} \Bigg\}$$

. Из которой найдем A=-1, B=0, $C = 1/3$, $D = -1/3$, $E = 1/3$.

Таким образом $\int \frac{dx}{x^5 - x^2} = -\int \frac{dx}{x^2} + \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{3}\int \frac{x-1}{x^2+x+1}dx = \frac{1}{x} + \frac{1}{3}\ln|x-1| - \frac{1}{6}\int \frac{2x+1-3}{x^2+x+1}dx =$

$$= \frac{1}{x} + \frac{1}{3}\ln|x-1| - \frac{1}{6}\ln(x^2+x+1) + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{(x+1/2)^2 + 3/4} = = \frac{1}{x} + \frac{1}{6}\ln\frac{(x-1)^2}{x^2+x+1} + \frac{1}{\sqrt{3}} arctg\,\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C$$

§6.3 Метод М. В. Остроградского

Ещё один метод, используемый при интегрировании правильной несократимой рациональной дроби $\frac{P(x)}{Q(x)}$, носит название *метода Остроградского*. Суть этого метода состоит в выделении рациональной части первообразной.

Пусть многочлен $Q(x)$, расположенный в знаменателе интегрируемой дроби, имеет кратные корни, включая и комплексные (чем выше кратность корней, тем эффективнее, вообще говоря, оказывается данный метод в сравнении с методом неопределённых коэффициентов). Разложим этот многочлен $Q(x)$ на произведение линейных и квадратичных сомножителей. Составим многочлен $Q_2(x)$ так, чтобы каждый корень многочлена $Q(x)$ являлся бы корнем многочлена $Q_2(x)$, но входил бы в этот многочлен с кратностью 1. Других корней у многочлена $Q_2(x)$, отличных от корней многочлена $Q(x)$, нет. Определим теперь многочлен $Q_1(x)$ так, чтобы $Q_1(x) \cdot Q_2(x) = Q(x)$. То есть каждый корень многочлена $Q(x)$, если первоначально он имел кратность n ($n \in N$), войдёт с кратностью, равной 1, в многочлен $Q_2(x)$, и с оставшейся после этого кратностью $(n-1)$ в многочлен $Q_1(x)$. В частности, все простые (кратности 1) корни многочлена $Q(x)$ будут корнями $Q_2(x)$ и не будут корнями $Q_1(x)$. Далее, введём в рассмотрение ещё два многочлена $P_1(x)$ и $P_2(x)$, записав их в общем виде с неопределёнными коэффициентами, причём их степени на единицу меньше соответственно степеней многочленов $Q_1(x)$ и $Q_2(x)$. Тогда справедлива формула Остроградского

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx = \frac{P_1(x)}{Q_1(x)} + \int \frac{P_2(x)}{Q_2(x)}dx \qquad (*)$$

Чтобы с её помощью вычислить интеграл в левой части, необходимо вначале продифференцировать по x это равенство

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \left(\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}\right)' + \frac{P_2(x)}{Q_2(x)},$$

и затем, приведя дроби в правой части равенства к общему знаменателю, найти неопределённые коэффициенты методом с аналогичным названием и закончить интегрирование по формуле (*).

Пример 36. Найти интеграл $\int \frac{xdx}{(x-1)^2(x+1)^3}$

Решение. Под знаком интеграла видим правильную дробь, знаменатель которой $Q(x)=(x-1)^2(x+1)^3$. Находим, что $Q_2(x)=(x-1)(x+1)$ и тогда $Q_1(x)=\frac{Q(x)}{Q_2(x)}=(x-1)(x+1)^2$. Так как степень многочлена $Q_1(x)$ равна 3, то $P_1(x)$ – квадратный трёхчлен, записанный в общем виде: $P_1(x)=ax^2+bx+c$. Аналогично, поскольку степень $Q_2(x)$ равна 2, то $P_2(x)$ – многочлен первой степени $P_2(x)=\delta x+e$. Следовательно, имеем пять неопределённых коэффициентов a, b, c, δ, e. Формула Остроградского примет вид

$$\int \frac{xdx}{(x-1)^2(x+1)^3}=\frac{ax^2+bx+c}{(x-1)(x+1)^2}+\int \frac{\delta x+e}{(x-1)(x+1)}dx.$$

Продифференцировав последнее равенство по x, получим

$$\frac{x}{(x-1)^2(x+1)^3}=\left(\frac{ax^2+bx+c}{(x-1)(x+1)^2}\right)'+\frac{\delta x+e}{(x-1)(x+1)}=$$

$$=\frac{(2ax+b)(x-1)(x+1)^2-(ax^2+bx+c)\left((x+1)^2+2(x-1)(x+1)\right)}{(x-1)^2(x+1)^4}+$$

$+\frac{\delta x+e}{(x-1)(x+1)}$. Сократив первую из дробей в правой части на $(x+1)$ и приведя все дроби к общему знаменателю, получим: $\frac{x}{(x-1)^2(x+1)^3}=$

$$=\frac{(2ax+b)(x-1)(x+1)-(ax^2+bx+c)(3x-1)+(\delta x+e)(x-1)(x+1)^2}{(x-1)^2(x+1)^3}.$$

Итак, при всех $x\neq\pm1$ должно выполняться данное тождество. Так как знаменатели дробей слева и справа равны, то должны быть тождественно равны многочлены, находящиеся в числителях:

$$x\equiv(2ax+b)(x^2-1)-(ax^2+bx+c)(3x-1)+(\delta x+e)(x^2-1)(x+1).$$

Найдём коэффициенты a, b, c, δ, e методом неопределённых коэффициентов (сняв временно ограничения $x\neq\pm1$). Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях x слева и справа:

$$\begin{array}{ll} x^4: & 0=\delta \\ x^3: & 0=-a+\delta+e \\ x^2: & 0=-2b+a+e-\delta \\ x^1: & 1=-2a-3c+b-e-\delta \\ x^0: & 0=-b+c-e \end{array}$$

Решая систему пяти уравнений с пятью неизвестными, находим

$$a=-\frac{1}{8},\ b=-\frac{1}{8},\ c=-\frac{1}{4},\ \delta=0,\ e=-\frac{1}{8}.$$

Подставим значения коэффициентов в формулу Остроградского:

$$\int \frac{xdx}{(x-1)^2(x+1)^3}=-\frac{x^2+x+2}{8(x-1)(x+1)^2}-\frac{1}{8}\int \frac{1}{(x-1)(x+1)}dx.$$

Осталось вычислить интеграл

$$\int \frac{1}{(x-1)(x+1)}dx = \frac{1}{2}\int \frac{(1+x)-(x-1)}{(x-1)(x+1)}dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right)dx = \frac{1}{2}\ln|x-1| - \ln|x+1| + C .$$

Итак, окончательно имеем:

$$\int \frac{xdx}{(x-1)^2(x+1)^3} = -\frac{x^2+x+2}{8(x-1)(x+1)^2} - \frac{1}{16}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + C \quad (x \neq \pm 1).$$

Пример 37. Найти интеграл $\int \frac{dx}{(x^3+1)^2}$

Решение: Согласно формуле Остроградского:

$$\int \frac{dx}{(x^3+1)^2} = \frac{Ax^2+Bx+C}{x^3+1} + D\int \frac{dx}{x+1} + \int \frac{Ex+F}{x^2-x+1}dx .$$

Дифференцируя и приводя к общему знаменателю, получаем тождество

$$1 \equiv -Ax^4 - 2Bx^3 - 3Cx^2 + 2Ax + B + D\left(x^5 - x^4 + x^3 + x^2 - x + 1\right) + (Ex+F)\left(x^4 + x^3 + x + 1\right),$$

откуда x^5: $0 = D + E$,

x^4: $0 = -A - D + E + F$,

x^3: $0 = -2B + D + F$,

x^2: $0 = -3C + D + E$,

x^1: $0 = 2A - D + E + F$,

x^0: $1 = B + D + F$.

Решая систему, находим $A = C = 0$, $B = \frac{1}{3}$, $D = -E = \frac{2}{9}$, $F = \frac{4}{9}$. Итак,

$$\int \frac{dx}{(x^3+1)^2} = \frac{x}{3(x^3+1)} + \frac{2}{9}\ln|x+1| - \frac{2}{9}\int \frac{x-2}{x^2-x+1}dx =$$

$$= \frac{x}{3(x^3+1)} + \frac{1}{9}\ln\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1} + \frac{2}{3\sqrt{3}}arctg\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C \quad (x \neq -1).$$

§7. Интегрирование некоторых тригонометрических функций.

Интегралов от тригонометрических функций может быть бесконечно много. Большинство из этих интегралов вообще нельзя вычислить аналитически, поэтому рассмотрим некоторые главнейшие типы функций, которые могут быть проинтегрированы всегда.

§7.1 Интеграл вида $\int R(\sin x, \cos x)dx$.

Здесь R – обозначение некоторой рациональной функции от переменных sin x и cos x. Интегралы этого вида вычисляются с помощью подстановки $t = tg\frac{x}{2}$. Эта подстановка позволяет преобразовать тригонометрическую функцию в рациональную.

$$\sin x = \frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}, \qquad \cos x = \frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2};$$ Тогда $x = 2\,arctgt;$ $\qquad dx = \frac{2dt}{1+t^2};$

Таким образом: $\int R(\sin x, \cos x)dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2}{1+t^2}dt = \int r(t)dt.$

Описанное выше преобразование называется универсальной тригонометрической подстановкой. Несомненным достоинством этой подстановки является то, что с ее помощью всегда можно преобразовать тригонометрическую функцию в рациональную и вычислить соответствующий интеграл. К недостаткам можно отнести то, что при преобразовании может получиться достаточно сложная рациональная функция, интегрирование которой займет много времени и сил. Однако при невозможности применить более рациональную замену переменной этот метод является единственно результативным.

Пример 38. Найти $\int \frac{dx}{1+\sin x+\cos x}$.

Решение. Полагаем $tg\frac{x}{2}=u.$ Тогда, согласно вышеприведенным равенством,

$$\int \frac{dx}{1+\sin x+\cos x}=\int \frac{2du/\left(1+u^2\right)}{1+\frac{2u}{1+u^2}+\frac{1-u^2}{1+u^2}}=\int \frac{du}{1+u}=\ln|1+u|+C=.\ \ln\left|1+tg\frac{x}{2}\right|+C.$$

Пример 39.

$$\int \frac{dx}{4\sin x+3\cos x+5}=\int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{4\frac{2t}{1+t^2}+3\frac{1-t^2}{1+t^2}+5}=2\int \frac{dt}{8t+3-3t^2+5+5t^2}=2\int \frac{dt}{2t^2+8t+8}=$$

$$=\int \frac{dt}{t^2+4t+4}=\int \frac{dt}{(t+2)^2}=-\frac{1}{t+2}+C=-\frac{1}{tg\frac{x}{2}+2}+C.$$

Пример 40.

$$\int \frac{dx}{9+8\cos x+\sin x}=\int \frac{2dt}{(1+t^2)\left[9+\frac{8(1-t^2)}{1+t^2}+\frac{2t}{1+t^2}\right]}=2\int \frac{dt}{t^2+2t+17}=2\int \frac{dt}{(t+1)^2+16}=\frac{1}{2}arctg\frac{t+1}{4}+C=\frac{1}{2}arctg\frac{tg\frac{x}{2}+1}{4}+C.$$

§7.2 Интеграл вида $\int R(\sin x,\cos x)dx$, если функция R является нечетной относительно cos x.

Несмотря на возможность вычисления такого интеграла с помощью универсальной тригонометрической подстановки, рациональнее применить подстановку t = sin x.

$$\int R(\sin x,\cos x)dx=\int \frac{R(\sin x,\cos x)}{\cos x}\cos x dx$$

Функция $\frac{R(\sin x,\cos x)}{\cos x}$ может содержать cos x только в четных степенях, а следовательно, может быть преобразована в рациональную функцию относительно sin x.

$$\int R(\sin x,\cos x)dx=\int r(\sin x)\cos x dx=\int r(t)dt.$$

Вообще говоря, для применения этого метода необходима только нечетность функции относительно косинуса, а степень синуса, входящего в функцию, может быть любой, как целой, так и дробной.

Пример 41.

$$\int \frac{\cos^7 x dx}{\sin^4 x}=\left\{\begin{array}{l}\sin x=t\\ dt=\cos x dx\\ \cos^2 x=1-\sin^2 x\end{array}\right\}=\int \frac{(1-t^2)^3}{t^4}dt=\int \frac{1-3t^2+3t^4-t^6}{t^4}dt=\int \frac{dt}{t^4}-3\int \frac{dt}{t^2}+$$

$$+3\int dt-\int t^2dt=-\frac{1}{3t^3}+\frac{3}{t}+3t-\frac{1}{3}t^3=-\frac{1}{3\sin^3 x}+\frac{3}{\sin x}+3\sin x-\frac{\sin^3 x}{3}+C.$$

§7.3 Интеграл вида $\int R(\sin x, \cos x)dx$ если функция R является нечетной относительно sin x.

По аналогии с рассмотренным выше случаем делается подстановка t = cos x. Тогда
$\int R(\sin x, \cos x)dx = \int r(\cos x)\sin x dx = -\int r(t)dt.$

Пример 42.

$$\int \frac{\sin^3 x}{2+\cos x}dx = \left\{ \begin{matrix} \cos x = t \\ dt = -\sin x dx \end{matrix} \right\} = -\int \frac{1-t^2}{2+t}dt = \int \frac{t^2+4t+4-4t-5}{t+2}dt = \int \left[\frac{(t+2)^2-4t-5}{t+2} \right] dt =$$

$$= \int \left[t+2-\frac{4t}{t+2}-\frac{5}{t+2} \right] dt = \int tdt + \int 2dt - 4\int \frac{tdt}{t+2} - 5\int \frac{dt}{t+2} = \frac{t^2}{2} + 2t - 5\ln|t+2| - 4\int \frac{t}{t+2}dt =$$

$$= \left\{ \begin{matrix} \dfrac{t}{t+2} = \dfrac{A}{t+2} + B \\ A + Bt + 2 = t \\ B = 1, \quad A = -2 \\ \dfrac{t}{t+2} = \dfrac{-2}{t+2} + 1 \end{matrix} \right\} = \frac{t^2}{2} + 2t - 5\ln|t+2| + 8\int \frac{dt}{t+2} - 4\int dt = \frac{t^2}{2} + 2t - 5\ln|t+2| + 8\ln|t+2| - 4t =$$

$$= \frac{t^2}{2} - 2t + 3\ln|t+2| + C = \frac{\cos^2 x}{2} - 2\cos x + 3\ln(\cos x + 2) + C.$$

§7.4 Интеграл вида $\int R(\sin x, \cos x)dx$, где функция R четная относительно sin x и cos x.

Для преобразования функции R в рациональную используется подстановка t = tgx.
Тогда $\int R(\sin x, \cos x)dx = \int r(t)dt$

Пример 43.

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x + 6\sin x \cos x - 16\cos^2 x} = \int \frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{tg^2 x + 6tgx - 16}dx = \left\{ \begin{matrix} tgx = t; \\ \dfrac{1}{\cos^2 x}dx = d(tgx) = dt \end{matrix} \right\} =$$

$$= \int \frac{dt}{t^2+6t-16} = \int \frac{dt}{(t+3)^2-25} = \frac{1}{10}\ln\left| \frac{tgx+3-5}{tgx+3+5} \right| + C = \frac{1}{10}\ln\left| \frac{tgx-2}{tgx+8} \right| + C.$$

§7.5 Интеграл произведения синусов и косинусов различных аргументов.

В зависимости от типа произведения применятся одна из трех формул:

$$\int \cos mx \cos nx dx = \int \frac{1}{2}[\cos(m+n)x + \cos(m-n)x]dx = \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(m+n)x}{m+n} + \frac{\sin(m-n)x}{m-n} \right]$$

$$\int \sin mx \cos nx dx = \int \frac{1}{2}[\sin(m+n)x + \sin(m-n)x]dx = \frac{1}{2}\left[-\frac{\cos(m+n)x}{m+n} - \frac{\cos(m-n)x}{m-n} \right]$$

$$\int \sin mx \sin nx dx = \int \frac{1}{2}[-\cos(m+n)x + \cos(m-n)x]dx = \frac{1}{2}\left[-\frac{\sin(m+n)}{m+n} + \frac{\sin(m-n)}{m-n} \right]$$

Пример 44. $\int \sin 7x \sin 2x dx = \frac{1}{2}\int \cos 5x dx - \frac{1}{2}\int \cos 9x dx = \frac{1}{10}\sin 5x - \frac{1}{18}\sin 9x + C.$

Пример 45.

$$\int \sin 10x \cos 7x \cos 4x dx = \int \sin 10x[\cos 7x \cos 4x]dx = \frac{1}{2}\int \sin 10x \cos 11x dx + \frac{1}{2}\int \sin 10x \cos 3x dx =$$

$$= \frac{1}{4}\int \sin 21x dx - \frac{1}{4}\int \sin x dx + \frac{1}{4}\int \sin 13x dx + \frac{1}{4}\int \sin 7x dx = -\frac{1}{84}\cos 21x - \frac{1}{4}\cos x - \frac{1}{52}\cos 13x - \frac{1}{28}\cos 7x + C.$$

Пример 46.

$$\int \sin^4 x dx = \int \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x\right)^2 dx = \frac{1}{4}\int (1-\cos 2x)^2 dx = \frac{1}{4}\int (1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x) dx = \frac{1}{4}\int dx - \frac{1}{2}\int \cos 2x dx + \frac{1}{4}\int \cos^2 2x dx =$$

$$= \frac{x}{4} - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{4}\int \frac{1}{2}(1 + \cos 4x) dx = \frac{x}{4} - \frac{\sin 2x}{4} + \frac{1}{8}\left[\int dx + \int \cos 4x dx\right] = \frac{x}{4} - \frac{\sin 2x}{4} + \frac{x}{8} + \frac{\sin 4x}{32} = \frac{1}{4}\left[\frac{3x}{2} - \sin 2x + \frac{\sin 4x}{8}\right] + C.$$

§8. Интегрирование иррациональных выражений.

Если в рациональной дроби некоторые из слагаемых в числителе или знаменателе заменить корнями от рациональных дробей (в том числе от многочленов), то полученная функция будет называться *иррациональной*[1].

В некоторых случаях интегралы от иррациональных функций удается *рационализировать*, т. е. с помощью подходящей подстановки свести к интегралам от рациональных дробей. Рассмотрим наиболее типичные случаи (везде далее подразумевается, что подынтегральная функция — иррациональная).

1. Если корни в подынтегральном выражении имеют вид:

$$\sqrt[n]{x^m}, \quad \sqrt[q]{x^p}, \quad \sqrt[s]{x^q}$$

и т. д., то оно преобразуется в рациональную дробь с помощью подстановки $x = t^k$, где k — наименьшее общее кратное показателей корней, т. е. чисел $n, q, s, \ldots$

2. Если выражение под знаком интеграла содержит только корни $\sqrt[n]{(ax+b)^m}$, $\sqrt[q]{(ax+b)^p}$, $\sqrt[s]{(ax+b)^r}$ и т. д. (в частности, при $b = 0$, $a = 1$ получаем случай 1), то оно приводится к рациональной дроби с помощью подстановки $ax + b = t^k$, где k — наименьшее общее кратное показателей корней, т. е. чисел $n, q, s, \ldots$

3. Если выражение под знаком интеграла содержит только корни $\sqrt[n]{\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^m}$, $\sqrt[q]{\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^p}$, $\sqrt[s]{\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^r}$ и т. д. (в частности, при $c = 0$, $d = 1$ получаем случай 2, а при $c = b = 0$, $d = a = 1$ — случай 1), то оно приводится к рациональной дроби с помощью подстановки $\frac{ax+b}{cx+d} = t^k$, где k — наименьшее общее кратное показателей корней, т. е. чисел n, q, $s, \ldots$

4. Если подынтегральное выражение представляет собой *дифференциальный бином*, то есть равно $x^m \cdot (a + bx^n)^p\,dx$, где m, n, p — рациональные числа, то данный интеграл сводится к интегралу от рациональной дроби в следующих трех случаях:

1) p — целое число; тогда интеграл можно рационализировать при помощи подстановки $x = t^k$, где k — общий знаменатель дробей m и n;

2) $\frac{m+1}{n}$ — целое число; тогда рационализация достигается подстановкой $a + bx^n = t^k$, где k — знаменатель числа p;

3) $\frac{m+1}{n} + p$ — целое число; в этом случае интеграл рационализируется с помощью подстановки $a \cdot x^{-n} + b = t^k$, где k — знаменатель числа p.

Интегралы типа

$$\int R(x; \sqrt{a^2 - x^2})dx, \quad \int R(x; \sqrt{a^2 + x^2})dx, \quad \int R(x; \sqrt{x^2 - a^2})dx$$

приводятся к интегралам от функций, рационально зависящих от тригонометрических функций, с помощью следующих *тригонометрических подстановок:* $x = a \cdot \sin t$ для первого интеграла; $x = a \cdot \operatorname{tg} t$ для второго интеграла; $x = \dfrac{a}{\sin t}$ для третьего интеграла.

Интегралы типа $\int R(x; \sqrt{ax^2+bx+c})\,dx$

Здесь подынтегральная функция есть рациональная функция относительно x и $\sqrt{ax^2+bx+c}$. Выделив под радикалом полный квадрат и сделав подстановку $x + \dfrac{b}{2a} = t$, интегралы указанного типа приводятся к интегралам уже рассмотренного типа, т. е. к интегралам типа $\int R(t; \sqrt{a^2-t^2})\,dt$, $\int R(t; \sqrt{a^2+t^2})\,dt$, $\int R(t; \sqrt{t^2-a^2})\,dt$. Эти интегралы можно вычислить с помощью соответствующих тригонометрических подстановок.

Пример 47.

Найти $\displaystyle\int \frac{\sqrt[6]{x+1}\,dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x+1}}$

▶ Так как НОК(2, 3, 6) = 6, то

$$\int \frac{\sqrt[6]{x+1}\,dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x+1}} = \left|\begin{matrix} x+1=u^6, \\ dx = 6u^5du \end{matrix}\right| = \int \frac{u}{u^3+u^2}\,6u^5du =$$

$$= 6\int \frac{u^4}{u+1}\,du = 6\int\left(u^3-u^2+u-1+\frac{1}{u+1}\right)du =$$

$$= \frac{3}{2}u^4 - 2u^3 + 3u^2 - 6u + 6\ln|u+1| + C =$$

$$= \frac{3}{2}\sqrt[3]{(x+1)^2} - 2\sqrt{x+1} + 3\sqrt[3]{x+1} - 6\sqrt[6]{x+1} + 6\ln\left|\sqrt[6]{x+1} + 1\right| + C. \blacktriangleleft$$

Пример 48.

Найти $\displaystyle\int \frac{dx}{x^7\sqrt{1+x^4}}$.

▶ Так как $m=-7$, $n=4$, $p=-1/2$, то $(m+1)/n+p = -3/2-1/2=-2$ — целое число. Имеем третий случай интегрируемости дифференциального бинома. Тогда

$$\int \frac{dx}{x^7\sqrt{1+x^4}} = \left|\begin{matrix} 1+x^4=u^2x^4,\ x=(u^2-1)^{-1/4}, \\ dx = -\dfrac{1}{2}(u^2-1)^{-5/4}u\,du \end{matrix}\right| =$$

$$= \int (u^2-1)^{7/4}u^{-1}(u^2-1)^{1/2}\left(-\frac{1}{2}\right)(u^2-1)^{-5/4}u\,du =$$

$$= -\frac{1}{2}\int(u^2-1)\,du = -\frac{1}{6}u^3 + \frac{1}{2}u + C = \left|u = \frac{\sqrt{1+x^4}}{x^2}\right| =$$

$$= \left(-\frac{1}{6x^6} + \frac{1}{3x^2}\right)\sqrt{1+x^4} + C. \blacktriangleleft$$